様式６

申請先学部　　　理学部　採択番号　No.2

平成３０年度学部学生による自主研究奨励事業研究成果報告書

ふりがな 氏　　名	たなか　みずき 田中　瑞樹	学部 学科	理学部 物理学科	学年	３年
ふりがな 共　同 研究者氏名		学部 学科		学年	年
					年
					年
アドバイザー教員 氏名	阿久津　泰弘	所属	理学研究科		
研究課題名	時系列データとしての音楽の解析				
研究成果の概要	研究目的、研究計画、研究方法、研究経過、研究成果等について記述すること。必要に応じて用紙を追加してもよい。（先行する研究を引用する場合は、「阪大生のためのアカデミックライティング入門」に従い、盗作剽窃にならないように引用部分を明示し文末に参考文献リストをつけること。）				

1）研究目的

私たちが普段聞き慣れている音楽は音階やリズムなどの要素が存在し、それらは「音楽理論」と呼ばれる理論体系に基づいてある程度記述されている。しかし、音楽理論で音楽が完全に記述できると問われれば Yes とは言い難い。即ち、音楽にはある程度の複雑さが存在する。私はその音楽の“規則正しさ”と同時に“複雑さ”をも兼ね備えてる点に “自然科学”、“数学”との共通点が存在すると推測した。本研究では**音楽を音の時系列と捉え、自然科学実験的、数学的な手法で音楽の規則性、複雑性の程度を解析する**ことが目的である。

2）研究方法

複雑さの一つの指標として“フラクタル次元”というものが存在する。その中でも“相関積分”によるフラクタル次元の推定、解析は音楽を音の時系列と捉えて解析にするにあたり最適な方法である。そのため、音楽時系列データのフラクタル次元の相関積分による推定に必要な単語や計算方法を以下の通りにまとめる。

・アトラクター

初期条件を加えた力学系が十分時間が経過した後の漸近的なふるまいのこと。力学系のアトラクターはいくつかの種類に分類できる。その中でも特に今回は“ストレンジアトラクター”と呼ばれるもの注目する。これは状態遷移が決定論的ではあるが、一見すると確率的のように見える系が持つアトラクターである。

・フラクタル次元

自分自身を拡大すると同じ構造が出現する特徴を“自己相似性”と呼ぶ。その自己相似性を持つ図形のことを“フラクタル図形”と呼ぶ。一方、我々は“図形の次元”という量を、図形の縮小という操作によって以下のように定義することができる。

$$D = \frac{\log_{10} N(r)}{\log_{10} r} \tag{1}$$

ここで、rは図形の縮小倍率、$N(r)$は縮小前の図形を縮小した図形で被覆するのに必要最低限の数である。これが次元の定義になっていることは、3 次元空間における立方体などを考えれば明らかである。この定義をフラクタル図形に適用したものが“フラクタル次元”である。即ち、フラクタル図形を$1/r$に縮小したときに、縮小前のフラクタル図形を$N(r)$個の縮小したフラクタル図形で被覆できた時、フラクタル次元は$\log N(r)/\log r$と記述できる。

・相関積分

ストレンジアトラクターにも自己相似性がある。従って、ストレンジアトラクターにおいてもフラクタル次元を定義することができる。しかし、一般的には式(1)を用いてストレンジアトラクターのフラクタル次元を推定することは不可能である。そこで、“相関積分”と呼ばれる方法により、フラクタル次元を推定することにする。まず、i番目の時系列データのm次元ベクトル$\boldsymbol{v}_i$を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{v}_i = \left(x_i(t_i), x_i(t_i+\tau), \cdots, x_i(t_i+(m-1)\tau)\right) \tag{2}$$

ここで、mのことを“埋め込み次元”と呼び、$x_i(t_i)$は時刻t_iにおける時系列データの値、τはある時間間隔とする。すると、相関積分とは以下のように定義された量である。

$$C^m(r) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I\left(r - \left|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\right|\right) \right)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} I\left(r - \left|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j\right|\right) \tag{3}$$

ここで、Iはヘビサイドのステップ関数、絶対値をマンハッタン距離として定義する。式の形から$C^m(r)$は「十分多数の時系列データにおいて、半径rのm次元超球に、自身以外の$N-1$個の時系列データのベクトル$\boldsymbol{v}$が入る確率の 2 乗を全時系列データに亘って足し合わせる」という意味である。即ち、これは先述した$N(r)$の自然な拡張であることが分かる。

・相関次元

式(1)の拡張として、

$$D = \frac{\log_{10} C^m(r)}{\log_{10} r} \tag{4}$$

を考えることができる。このようにして定義される次元のことを“相関次元”と呼ぶ。ストレンジアトラクターを持つ系に対して“相関次元=フラクタル次元”とすることが一般的である。

以上の定義を踏まえて、次の順序で解析を行う。なおこの手法は参考文献[1]を基に少しだけ改良したものである。

1.まず、データ解析を行いやすくするために楽譜を多少変更する。高音部(メロディーライン)の音の間隔を一番短い音符基準で区切る。例えば楽曲を通じて 16 分音符が一番短い音符ならそれより長い音符をすべて 16 分音符で区切る。また、休止符は音楽の流れとして一番自然な音を割り当てる。

2.楽曲を通じての高音部(メロディーライン)の最高音を 1、最低音を 0 として半音階単位で音階を分解し数値を振り分ける。例えば、楽曲を通じての高音部の最高音が A5、最低音が C3 であるならば、半音階を 33 分解し、G4 は 19、F3♯は 6 といった数値を割り振る。

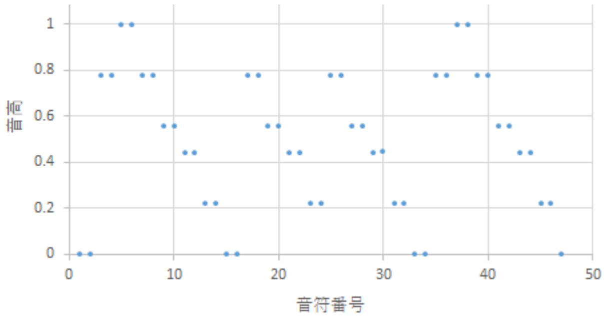
3.得られた時系列データの各埋め込み次元mにおける相関積分を求めることにより、相関次元を得る。得られた相関次元を楽曲のフラクタル次元と定義する。

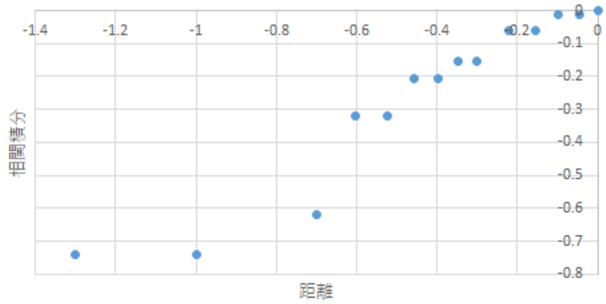
3）研究結果

実は、本研究はまだ結論には至っていない。従って、この報告書では主に、研究の途中結果と解析方法の欠点、及びそれを踏まえた今後の展望を述べることにする。

・楽曲の解析

本研究では変奏されてない“きらきら星”の解析のみを行った。数値計算は Excel で行った。以下に音符を数値化した時系列データと、$m = 1$のときのrと相関積分の関係を以下に示す。





この時、相関次元の値は 0.53 となった。時系列データのアトラクターの相関次元を求めるにはmを大きくしなければならないが、Excel の計算能力の限界により、本研究ではm=1 のときのみしか求めることができなかった。

・解析方法の欠点

音楽を音の時系列として捉えてフラクタル次元を推定する方法において音を最小分音符で分解する必要がある。1 種類の音符で構成されている音楽はほぼ存在しないため、必ずと言っていいほどこの作業を行う必要がある。しかし、これは同時に元の音楽の構造を変化させるという作業でもある。構造を変化させて解析を行うことは、元々持っていた情報を失ってしまう、または余分な情報を付け加えてしまう可能性が非常に高い。即ち、真のデータ解析としては不十分である。また、相関積分によるフラクタル次元の推定は十分多数の時系列データが必要である。従って短い楽曲(ポップミュージックなど)に対してはこの方法はあまり有用でない。

・今後の展望

複雑さを議論する方法がフラクタル次元推定以外にも存在する。そのために時系列データ解析の勉強をして改めて音楽の複雑さを議論していきたい。また、時系列データとして解析するには音という情報を数値データに変換する必要がある。その際に、元の音楽をの構造を崩さないようにするために音楽について勉強しなおす必要がある。

参考文献

[1] “エントロピー時系列による音楽の解析とその変曲・作曲への応用”　著者：井上政義
[2] “カオス時系列解析の基礎と応用”　著者：池口徹、小室元政、山田泰司、合原一幸